Faculté des sciences et génie
Département de mathématiques et statistique

Prénom et nom en lettres moulées

Examen 3

Probabilités (STT-1500)
29 avril (8 h 30 à 10 h 20)
Enseignant : Jérôme Soucy

Directives de l'évaluation

1. Vérifiez que votre questionnaire comporte 5 questions réparties sur 7 pages, incluant la page couverture. Cette évaluation sera notée sur 73 points et vaut pour 35 % de votre note de session.
2. Inscrivez votre prénom suivi de votre nom, dans l'encadré prévu à cet effet. Inscrivez aussi vos initiales au bas de chacune des pages 2 à 7.
3. Déposez une carte d'identité avec photo sur le coin du bureau où vous rédigez l'examen.
4. Ne surlignez pas vos réponses ou d'autres éléments pertinents de votre démarche.
5. **Si vous manquez d'espace pour rédiger la réponse d'une question, vous devez utiliser le verso de la feuille où se trouve la question concernée. Le cas échéant, assurez-vous d'indiquer au recto que la suite de la réponse se trouve au verso. Dans le cas contraire, nous ne corrigerons pas le verso.**
6. Aucune page de cet examen ne doit être dégrafée. **N'insérez aucune feuille dans l'examen.**
7. **Sauf indication contraire, vous devez justifier chacune des étapes du raisonnement qui mène à la réponse que vous avez obtenue.**
8. Un aide-mémoire vous sera distribué avec l'examen.
9. Une calculatrice autorisée par la Faculté des sciences et génie est permise. Elle doit figurer parmi les modèles suivants : HP 20S, HP 30S, HP 32S2, HP 33S, HP 35S, TI-30Xa, TI-30XIIB, TI-30XIIS, TI-36X*, TI-30X MultiView (XS ou XB), BA35, EL-531*, EL-535, W535, EL-W535*, EL-546**, EL-510*, EL-520*, FX-260, FX-300 ES Plus, FX-300 MS, FX-300 W Plus, FX-350 MS, FX-991 MS, FX-991ES et FX-991ES PLUS, FX-991ES PLUS C, FX-991ES PLUS 2. N'importe quelles lettres peut remplacer l'astérisque.

Question 1 (20 points)

Ci-dessous est représentée la fonction de masse conjointe de deux variables aléatoires X et Y.

Fonction de masse conjointe de X et Y			
	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 3$
$X = 0$	0,1	0,2	0,3
$X = 1$	0,2	0,1	0,1

Pour chacune des sous-questions (a) à (f) ci-dessous, écrivez uniquement la réponse dans l'encadré. Donnez-la sous forme de fraction irréductible ou arrondie à 4 chiffres après le séparateur décimal. Si vous croyez que nous ne disposons pas de toute l'information nécessaire pour calculer la quantité demandée, écrivez le mot IMPOSSIBLE dans la case correspondante. Aucune justification n'est requise pour les sous-questions (a) à (g).

(2) (a) Que vaut $\mathbb{P}(Y = 3)$? ☐

(2) (b) Que vaut $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y \neq 3\})$? ☐

(2) (c) Que vaut $\mathbb{P}(X > 0 | Y > 0)$? ☐

(2) (d) Que vaut $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 = 1)$? ☐

(3) (e) Supposons que $Z = XY$. Que vaut l'espérance de Z ? ☐

(3) (f) Soit F la fonction de répartition conjointe de X et Y. Que vaut $F(1, 2)$? ☐

(2) (g) VRAI ou FAUX : X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. ☐ VRAI ☐ FAUX

(4) (h) Calculez la covariance des variables aléatoires X et Y. Laissez les traces de vos calculs et écrivez votre réponse dans l'encadré au bas de cette page.

$\text{Cov}(X, Y) =$ ☐

Vos initiales : ☐

Question 2 (14 points)

Ibrahim a installé l'application *Wake Me Zen* sur sa montre intelligente. Elle est programmée pour le réveiller entre 7 h 00 et 7 h 30, selon différents facteurs liés à la qualité de son sommeil. La distribution de son heure de réveil est supposée uniforme sur cet intervalle. Une fois réveillé, il met 35 minutes pour faire sa routine matinale avant de quitter. La durée de son trajet pour se rendre de son appartement au local PLT-2751 du pavillon Adrien-Pouliot pour son examen 3 de *STT-1500 : Probabilités* (qui débute à 8 h 30) suit une distribution exponentielle dont l'espérance est de 25 minutes, selon le traffic sur le Chemin Ste-Foy.

(10) (a) Quelle est la probabilité qu'Ibrahim soit en retard à son cours ?

Suggestion : définissez S, une variable aléatoire correspondant au temps passé entre 7 h 00 et le moment où Ibrahim met les pieds dans le PLT-2751.

Vos initiales :

(4) (b) À quelle heure, en moyenne, Ibrahim arrive-t-il au PLT-2751 ? **Remarque** : vous n'avez pas besoin d'avoir réussi la sous-question (a) pour faire la sous-question (b). Écrivez votre réponse finale dans l'encadré ci-dessous.

Réponse : ☐

Question 3 (13 points)

Qualifiez chacun des énoncés (a) à (e) de VRAI ou FAUX. Pour la sous-question (f), cochez la bonne réponse. Aucune justification requise pour toutes les sous-questions.

(2) (a) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme $(0, 1)$. Alors $X + Y \sim$ uniforme $(0, 2)$. ☐ VRAI ☐ FAUX

(2) (b) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle (2024). Alors $X + Y \sim$ gamma $(2, 2024)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

(2) (c) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Posons $Z = X/Y$. Alors $\mathbb{E}(Z) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

(2) (d) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(10, 8)$ et $\mathcal{N}(10, 7)$ respectivement. Alors $X - Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

(2) (e) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes dont les fonctions génératrice des moments sont $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ respectivement. Alors la fonction génératrice des moments de $X + Y$ est donnée par $M_X(t) + M_Y(t)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

(3) (f) Supposons que $X \sim$ binomiale négative $(5, 1/3)$. On pose $Y = 10 - \frac{X}{2}$. Notons ρ le coefficient de corrélation entre X et Y. Alors

☐ $\rho = -1$ ☐ $-1 < \rho < -\frac{1}{2}$ ☐ $\rho = -\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2} < \rho < 0$ ☐ $\rho = 0$

☐ $0 < \rho < \frac{1}{2}$ ☐ $\rho = \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{2} < \rho < 1$ ☐ $\rho = 1$ ☐ $\rho \notin [-1, 1]$

Vos initiales : ☐

Question 4 (8 points)

Michel est le patron de plusieurs gestionnaires de portefeuille d'une firme de placement. À la fin de l'année, les gestionnaires à son emploi qui auront obtenu un rendement figurant dans le 75^{e} rang centile ou mieux obtiendront une prime de rendement. Les rendements (en point de pourcentage) de ses employés sont distribués selon une $\mathcal{N}\left(5, 6^2\right)$.

Déterminez le rendement minimal donnant droit à une prime de rendement.

Vos initiales :

Question 5 (18 points)

Soit X une variable aléatoire vérifiant $X \sim \text{gamma}\,(\alpha, \lambda)$. Soit $n \in \{1, 2, 3, ...\}$.

(5) (a) Montrez que

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\lambda^n \Gamma(\alpha)}.$$

(5) (b) Utilisez les propriétés de la fonction gamma pour obtenir une expression de $\mathbb{E}(X^3)$ qui ne fait pas intervenir la fonction gamma. Écrivez votre réponse finale dans l'encadré au bas de cette page.

Réponse :

Vos initiales :

(8) (c) Calculez le coefficient d'asymétrie de X. Écrivez votre réponse finale dans l'encadré au bas de cette page.

Réponse :

Vos initiales :